Herleitung des normierten Bewegungsgesetzes
Geneigte Sinuslinie R-R nach Helling-Bestehorn

Bei einem normierten Bewegungsgesetz f(z) läuft der Antriebsparameter z von 0 bis 1.
Für die Funktionswerte gilt: f(0) = 0 und f(1) = 1.
Für ein Rast-in-Rast-Bewegungsgesetz (R-R) gilt außerdem:
f'(0) = 0, f'(1) = 0, f''(0) = 0, f''(1) = 0

Idee: Der Beschleunigungsverlauf soll sinusförmig sein:

$$f''(z)=a\cdot\sin(d\cdot z)$$

Die Bedingungen f''(0) = 0 und f''(1) = 0 für das R-R-Bewegungsgesetz sind damit immer erfüllt.
Damit die Sinusfunktion ihre volle Periode durchläuft, muss d = 2 π sein:

$$f''(z)=a\cdot\sin(2\pi z)$$

Der Faktor a (ungleich 0) ist noch zu ermitteln.

Integration von f''(z) ergibt

$$f'(z)=b-\frac{a}{2\pi}\cdot\cos(2\pi z)$$

mit der Integrationskonstanten b. Aus der Forderung f'(0) = 0 ergibt sich

$$0=b-\frac{a}{2\pi}\cdot 1 \quad \text{oder} \quad b=\frac{a}{2\pi}$$

Damit ist

$$f'(z)=\frac{a}{2\pi}-\frac{a}{2\pi}\cos(2\pi z)=\frac{a}{2\pi}(1-\cos(2\pi z))$$

Integration von f'(z) ergibt

$$f(z)=c+\frac{a}{2\pi}z-\frac{a}{(2\pi)^2}\cdot\sin(2\pi z)$$

mit der Integrationskonstanten c. Aus der Forderung f(0) = 0 ergibt sich

$$0=c+\frac{a}{2\pi}0-\frac{a}{(2\pi)^2}\cdot\sin(2\pi 0)=c \quad \text{bzw.} \quad c=0$$

Damit und aus f(1) = 1 ergibt sich

$$1 = c + \frac{a}{2\pi} \cdot 1 - \frac{a}{(2\pi)^2} \cdot \sin(2\pi \cdot 1) = 0 + \frac{a}{2\pi} - 0 = \frac{a}{2\pi} \quad \text{bzw.} \quad a = 2\pi$$

Insgesamt ergibt sich für das Bewegungsgesetz f(z):

$$f(z) = 0 + \frac{2\pi}{2\pi} z - \frac{2\pi}{(2\pi)^2} \cdot \sin(2\pi z) = z - \frac{\sin(2\pi z)}{2\pi}$$

$$f'(z) = \frac{2\pi}{2\pi}(1 - \cos(2\pi z)) = 1 - \cos(2\pi z)$$

$$f''(z) = 2\pi \sin(2\pi z)$$

Zusammengefasst:

$$f(z) = z - \frac{\sin(2\pi z)}{2\pi}$$

$$f'(z) = 1 - \cos(2\pi z)$$

$$f''(z) = 2\pi \sin(2\pi z)$$